



Prof. Apollinaire NDONDO

13 janvier 2026

Chapitre 2 : Le Plan dans l'Espace a 3 dimensions

Prof. NDONDO M. Apollinaire

L2 Informatique (Tous) .
Université Nouveaux Horizons

Année académique
2025-2026

Chapitre II. Le Plan dans l'Espace à 3 dimensions

II.1. Introduction

II.1.1. Equation d'une surface On appelle équation d'une surface, toute équation à trois variables x, y, z à laquelle satisfont les coordonnées de chaque point de la surface et on la note $F(x, y, z) = 0$

II.1.2. Les surfaces algébriques

Elles sont définies par des équations algébriques de la forme :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

et

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + G = 0$$

Chapitre II. Le Plan dans l'Espace à 3 dimensions

Définitions

- Toute équation du premier degré en l'une au moins des variables x, y, z représente un plan. En d'autres termes, un plan est une surface algébrique du premier degré.
- On appelle **normale** à un plan tout vecteur non nul perpendiculaire à toutes les droites du plan.

II.2. Equations du Plan

II.2.1. Equations paramétriques du plan

Soient $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{b}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs adjacents non nuls et non parallèles dans un repère orthonormé $\{0, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point du plan (π) parallèle au plan déterminé par \vec{a} et \vec{b}

Si $B(x, y, z)$ est un point quelconque du plan (π) , on a :
 $\vec{AB} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ avec λ et μ sont des paramètres réels.

Comme $0\vec{B} = 0\vec{A} + \vec{AB}$, alors $0\vec{B} = 0\vec{A} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

De ces équations, on tire le système d'équations suivant :

$$(S) \begin{cases} X = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ Y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ Z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

Le système (S) est appelé **équations paramétriques** du plan (π)

Equations paramétriques du plan

Exercice d'Application

Déterminer les équations paramétriques du plan contenant le point $N(2, -4, 3)$ et parallèle au plan défini par les vecteurs $\vec{a}(1, 4, 2)$ et $\vec{b}(3, -1, 5)$.

Solution

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan, on : $\vec{OM} = \vec{ON} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. On a :

$$(x, y, z) = (2, -4, 3) + \lambda(1, 4, 2) + \mu(3, -1, 5) =$$

$$(2 + \lambda + 3\mu, -4 + 4\lambda - \mu, 3 + 2\lambda + 5\mu)$$

D'où le système 'équations paramétriques est :

$$(S) \begin{cases} X = 2 + \lambda + 3\mu \\ Y = -4 + 4\lambda - \mu \\ Z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$$

11.2.2. Equation du Plan passant par 3 points non colinéaires

Equation du Plan passant par 3 points non colinéaires

Soient $M(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ 3 points non colinéaires et $P(x, y, z)$ un point quelconque du plan (π) , on a :

$$0\vec{P} = 0\vec{M} + \lambda\vec{MA} + \mu\vec{MB} = (1 - \lambda - \mu)0\vec{M} + \lambda 0\vec{A} + \mu 0\vec{B}$$

De cette équation, on tire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} X = (1 - \lambda - \mu) x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 \\ Y = (1 - \lambda - \mu) y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2 \\ Z = (1 - \lambda - \mu) z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2 \end{cases}$$

Le système ci dessus donne les **équations paramétriques** du plan (π) passant par 3 points non colinéaires

$M(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$

Exercice d'Application

Exercices

Trouver les équations paramétriques du plan contenant les 3 points $M(1, 2, 1)$, $A(0, -2, 3)$ et $B(-1, 2, -1)$

Solution

Les équations paramétriques du plan contenant les 3 points $M(1, 2, 1)$, $A(0, -2, 3)$ et $B(-1, 2, -1)$ sont données par :

$$\begin{cases} X = (1 - \lambda - \mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 \\ Y = (1 - \lambda - \mu)y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2 \\ Z = (1 - \lambda - \mu)z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2 \end{cases}$$

$$\text{On a } \begin{cases} X = 1 - \lambda - 2\mu \\ Y = 2 - 4\lambda \\ Z = 1 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

II.3. Equations cartésiennes du Plan dans l'espace

II.3.1. Plan de normale η et passant par un point M_0 donné

Soit le plan (π) d'équation

$$(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \text{ avec } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

On cherche l'équation générale du plan (π) passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de normale $\vec{\eta}(A, B, C)$.

Equation du Plan de normale η et passant par le point M_0

L'équation générale du plan cherché est telle que

$\vec{\eta} \cdot \vec{M_0 N} = 0 \iff (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ Ce qui donne

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ou encore apres developpement

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

11.3. Equations cartésiennes du Plan dans l'espace

Exemple 1

Trouver l'équation du plan passant par $M(1, -2, 2)$ et de normale $\eta(1, -3, 2)$

Solution : $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ et
 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -11$. On a $(\pi) \equiv x - 3y + 2z - 11 = 0$

Exemple 2

Trouver l'équation du plan passant par $P(2, 2, 1)$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{0P}$

Solution : Soit $M(x, y, z)$ un point du plan cherché.

Si le plan est perpendiculaire au vecteur $\vec{0P}$, alors $\vec{0P} \cdot \vec{PM} = 0$.

Ainsi donc, $(2, 2, 1) \cdot (x - 2, y - 2, z - 1) = 0$.

$(\pi) \equiv 2x + 2y + z - 9 = 0$

11.3. Equations cartésiennes du Plan dans l'espace

Exemple 3

Déterminer un vecteur unitaire perpendiculaire au plan

$$3x + 6y - 2z + 10 = 0$$

Solution : Le vecteur $\vec{\eta}$ orthogonal au plan est $\vec{\eta}(3, 6, -2)$.

Etant donné que $\|\vec{\eta}\| = 7$, le vecteur unitaire perpendiculaire au plan est

$$\frac{\vec{\eta}}{\|\vec{\eta}\|} = \frac{(3, 6, -2)}{7} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-2}{7}\right)$$

II.3.2. Equation du plan définie par ses coordonnées à l'origine

II.3.2. Equation du plan définie par ses coordonnées à l'origine

Soit le plan (π) coupant les 3 axes respectivement aux points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$

Soit $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan (π) avec $(D \neq 0)$ car (π) ne passe pas par l'origine des axes.

L'équation du plan cherché est donnée par

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

qui est l'équation du plan en fonction de ses coordonnées à l'origine.

11.3. Equations cartésiennes du Plan dans l'espace

Exemple 4

Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ avec les axes de coordonnées.

Solution : L'équation du plan étant $3x + 4y + 6z - 12 = 0$, alors nous avons :

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0 \implies \frac{3x + 4y + 6z}{12} = 0 \implies \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

D'où le plan coupe les axes de coordonnées aux points

$$A(4, 0, 0), B(0, 3, 0) \text{ et } C(0, 0, 2).$$

II.3.3 Equations incomplètes du plan

Quelques plans particuliers

1. Plans parallèles aux plans de coordonnées

Considérons $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

- ① Si $(\pi) \parallel X0Y$ alors $A = B = 0 \implies Cz + D = 0$ ou $z = K$ (cste). En particulier, $z = 0$ est l'équation du plan $X0Y$.
- ② Si $(\pi) \parallel Y0Z$ alors $B = C = 0 \implies Ax + D = 0$ ou $x = C$ (cste). En particulier, $x = 0$ est l'équation du plan $Y0Z$.
- ③ Si $(\pi) \parallel X0Z$ alors $A = C = 0 \implies By + D = 0$ ou $y = L$ (cste). En particulier, $y = 0$ est l'équation du plan $X0Z$.

II.3.3 Equations incomplètes du plan

Quelques plans particuliers

2. Plans parallèles aux axes de coordonnées

Considérons $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

- ❶ Si $(\pi) \parallel 0X$ alors $A = 0 \implies By + Cz + D = 0$.
- ❷ Si $(\pi) \parallel 0Y$ alors $B = 0 \implies Ax + Cz + D = 0$.
- ❸ Si $(\pi) \parallel 0Z$ alors $C = 0 \implies Ax + By + D = 0$.

11.3.4. Equation du plan passant par 3 points non colinéaires

Soit le plan (π) passant par 3 points non alignés

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ trois points non colinéaires
et $M(x, y, z)$ un point quelconque du plan (π) .

Les vecteurs \vec{AM} , \vec{AB} et \vec{AC} coplanéaires, on a :

$$(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$$

$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ et

$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ alors, l'équation vectorielle

$(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ se traduit par :

$$\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

11.3. Equations cartésiennes du Plan dans l'espace

Exemple 5

Trouver l'équation cartésienne du plan passant par les points $A(1, 3, -1)$, $B(-2, 1, 5)$ et $C(3, 2, 6)$.

Solution : Soit $M(x, y, z)$ un point du plan (π) , alors les vecteurs \vec{AM} , \vec{AB} et \vec{AC} coplanéaires et on a $(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ avec $\vec{AM} = (x - 1, y - 3, z + 1)$, $\vec{AB} = (-3, -2, 6)$ et $\vec{AC} = (2, -1, 7)$, l'équation du plan cherché est :

$$\begin{bmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} = 0 \iff 8x - 33y - 7z + 84 = 0$$

Trouver l'équation cartésienne du plan passant par les points $A(2, 1, 1)$, $B(3, 3, -2)$ et $C(4, 1, 5)$.

III.3.5. Condition pour que 4 points soient colinéaires

Condition pour que 4 points soient coplanaires

Pour que 4 points $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ et $A_4(x_4, y_4, z_4)$ soient coplanaires, il faut et il suffit que

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Exemple : Vérifier que les points $A(2, -3, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(2, -1, 2)$ et $D(1, -1, 3)$ sont coplanaires.

11.4. Equation normale du plan

Formulation

Considérons un plan (π) ne passant pas par l'origine et les angles directeurs sont α, β, γ et dont la distance à l'origine des coordonnées est p

L'équation normale du plan (π) est donnée par :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

Remarque : Si le plan (π) passe par l'origine, $p = 0$.

Dans ce cas, l'équation normale d'un plan passant par l'origine est

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

11.4.2. Normalisation de l'équation d'un plan

Formulation

Considérons un plan $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$. Son équation normale étant $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, on a que ces 2 équations sont identiques puisqu'elles représentent le même plan.

Dans ce cas, on a : $\frac{A}{\cos \alpha} = \frac{B}{\cos \beta} = \frac{C}{\cos \gamma} = \frac{D}{-p} = K$

Par suite, $\cos \alpha = \frac{A}{K}$; $\cos \beta = \frac{B}{K}$; $\cos \gamma = \frac{C}{K}$ et $-p = \frac{D}{K}$

D'autre part, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Ainsi,

$$\frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} + \frac{C^2}{K^2} = 1 \implies K^2 = A^2 + B^2 + C^2 \implies$$

$$K = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

11.4.2. Normalisation de l'équation d'un plan

Remarques

- La valeur de $p = -\frac{D}{K}$ et p est essentiellement positif.
- K et D doivent être des signes contraires. On affectera à K le signe contraire de D .

- $\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; $\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; $\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- $-p = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

L'équation normalisée du plan est $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$

11.4.2. Normalisation de l'équation d'un plan

Remarques (suite)

- Les coefficients A, B, C sont proportionnels aux cosinus de la normale du plan.
- Le terme $K = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ est appelé **facteur de normalisation**.

Exemple 1

Trouver l'équation du plan dont on donne les éléments normaux $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ et $p = 6$

Solution : L'équation du plan s'écrit

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \text{ Ainsi,}$$

$$x \cos \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{3} + z \cos \frac{\pi}{3} - 6 = 0 \implies \sqrt{2}x + y + z - 12 = 0.$$

11.4.2. Normalisation de l'équation d'un plan

Exemple 2

Soit $x + \sqrt{2}y + z - 10 = 0$ l'équation d'un plan. Calculer les angles α , β et γ formés par la normale avec les axes de coordonnées et sa distance p par rapport à l'origine des coordonnées.

Solution : On sait que

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 + 1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

$$p = \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{10}{2} \Rightarrow p = 5$$

II.5. Problèmes sur le plan

II.5.1. Distance d'un point à un plan

Soit $P(x_1, y_1, z_1)$ un point quelconque de l'espace et le plan $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, la distance entre le point P et le plan (π) est donnée par :

$$\delta = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Exemple 1 Déterminer la valeur de la constante D telle que la distance du point $P(1, 3, 2)$ au plan d'équation $3x - 12y + 4z + D = 0$ soit égale à 2.

Solution $2 = \left| \frac{3(1) - 12(3) + 4(2) + D}{\sqrt{9 + 144 + 16}} \right| = \frac{|D - 25|}{13}$

Il s'en suit $2 = \frac{|D - 25|}{13} \implies |D - 25| \implies D = 51 \text{ ou } D = -1$

II.5. Problèmes sur le plan

II.5.2. Plans parallèles et Plans perpendiculaires ou orthogonaux

Soient les plans $(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ de normale $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ et $(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ de normale $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

Plans parallèles

- (π_1) et (π_2) distincts, sont **parallèles** si et seulement si

$$\vec{\eta}_1 \parallel \vec{\eta}_2, \text{ on doit alors avoir : } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

- Sinon (π_1) et (π_2) sont **confondus** si et seulement si

$$\vec{\eta}_1 = \lambda \vec{\eta}_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on doit avoir : } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

II.5. Problèmes sur le plan

II.5.2. Plans perpendiculaires ou orthogonaux

- (π_1) et (π_2) distincts, sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{\eta}_1 \perp \vec{\eta}_2 \iff \vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2 = 0$, on doit alors avoir :
 $A_1 A_1 . A_2 + B_1 . B_2 + C_1 . C_2 = 0$

Position entre 2 plans

Exemples

Déterminer la position des plans suivants l'un par rapport à l'autre

- ❶ $(\pi_1) \equiv 2x - 3y - 4z + 11 = 0$, $(\pi_2) \equiv -4x + 6y + 8z + 36 = 0$
- ❷ $(\pi_1) \equiv 3x - 5y - 4z - 71 = 0$ et $(\pi_2) \equiv 6x + 2y + 2z - 7 = 0$
- ❸ $(\pi_1) \equiv 3x - 2y + 7 = 0$ et $(\pi_2) \equiv 2x + 2y + z + 4 = 0$

Position entre 2 plans

Solution

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{-4}{8} \neq \frac{11}{36} \implies (\pi_1) \parallel (\pi_2) \text{ distincts}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{6} \neq \frac{-5}{2} = \frac{-4}{2} \implies (\pi_1) \nparallel (\pi_2) \text{ plans non paralleles .}$$

Vérifions l'orthogonalité. On a

$$3.6 - 5.2 - 4.2 = 0 \implies (\pi_1) \perp (\pi_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{3}{2} \neq \frac{-2}{2} \neq \frac{0}{1} \implies (\pi_1) \nparallel (\pi_2) \text{ plans non paralleles . Vérifions l'orthogonalité. On a } 3.2 - 2.2 + 0.2 = 2 \neq 0 \implies$$

ces plans ne sont pas orthogonaux, ils sont sécants

11.5.3. Angles entre 2 plans

Soient les plans $(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ de normale $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ et $(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ de normale $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ et formant entr'eux un angle α

Exemples

L'angle α formé entre ce deux plans est donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2}{\|\vec{\eta}_1\| \cdot \|\vec{\eta}_2\|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

11.5.4. Distance entre 2 plans parallèles

Soient les plans $(\pi_1) \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ et $(\pi_2) \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$

CAS 1. Plans parallèles ne différant uniquement que par leurs termes indépendants

- Dans ce cas, la distance entre ces 2 plans est donnée par :

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

11.5.4. Distance entre 2 plans parallèles

CAS 2. Plans parallèles d'équations différentes

Soient $(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et

$(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Considérons les points $P(x_1, y_1, z_1) \in (\pi_2)$ et $Q(x_2, y_2, z_2) \in (\pi_1)$

La distance entre les deux plans (π_1) et (π_2) est donnée par

$$\delta = \frac{|A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

ou

$$\delta = \frac{|A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

11.5.4. Distance entre 2 plans parallèles

Exemple

Déterminer la distance entre les plans $(\pi_1) \equiv 2x - y - z + 2 = 0$ et $(\pi_2) \equiv 6x - 3y - 3z + 10 = 0$ est donnée par

Solution

Remarquons pour commencer que ces 2 plans sont parallèles

puisque : $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Par suite, on a : $2x - y - z + 2 = 0 \iff 6x - 3y - 3z + 10 = 0$

Dans le premier cas, la distance entre les deux plans est

$$\delta = \frac{|10-6|}{\sqrt{54}} = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

Dans le deuxième cas, multipliant la première équation par 3 et prenant $Q(0, 1, 1) \in (\pi_1)$. Alors la distance entre les 2 plans est la distance entre Q et (π_2) ,

$$\text{on a : } \delta = \frac{|6(0)-3(1)-3(1)+10|}{\sqrt{36+9+9}} = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

11.5.5. Plan passant par 2 points et perpendiculaire à un plan donné

Plan passant par 2 points et perpendiculaire à un plan donné

Soit le plan $(\pi) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ de normale

$\vec{\eta} = (A, B, C)$ et les points $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de (π)

On cherche l'équation du plan (σ) perpendiculaire à (π) et passant par les point M_0 et M_1 .

Solution

Si $M(x, y, z) \in (\sigma)$: On a que les vecteurs $\vec{M_0M}$, $\vec{M_0M_1}$ et $\vec{\eta}$ sont coplanaires, c'est a dire $(\vec{M_0M}, \vec{M_0M_1}, \vec{\eta}) = 0$

L'équation du plan (σ) est donc :

$$\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{bmatrix} = 0$$

11.5.5. Plan passant par 2 points et perpendiculaire à un plan donné

Exemple

Trouver l'équation du plan passant par $M_0(1, 1, 1)$ et $M_1(0, 0, 4)$ et perpendiculaire au plan $x + 2y + z - 4 = 0$.

Solution

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan (σ) cherché, alors :

$\vec{M_0M} = (x - 1, y - 1, z - 1)$, $\vec{M_0M_1} = (-1, -1, 3)$ et $\vec{\eta}(1, 2, 1)$ sont coplanaires, c'est à dire $(\vec{M_0M}, \vec{M_0M_1}, \vec{\eta}) = 0$

L'équation du plan (σ) est donc donnée par :

$$\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ ou } 7x - 4y + z - 4 = 0$$

11.5.6. Plan passant par 1 point donné et perpendiculaire à 2 plans donnés

Plan passant par 1 point donné et perpendiculaire à 2 plans donnés

Soient les $(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ de normale respective $\vec{\eta}_1(A_1, B_1, C_1)$ et $\vec{\eta}_2(A_2, B_2, C_2)$.

On cherche l'équation du plan (π) passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à la fois à (π_1) et (π_2) .

Considérons le point $M(x, y, z) \in (\pi)$, alors les vecteurs $\vec{M_0M}$, $\vec{\eta}_1$ et $\vec{\eta}_2$ sont coplanaires, c'est à dire $(\vec{M_0M}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = 0$

L'équation du plan (π) est donc donnée par :

$$\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 0$$

11.5.5. Plan passant par 1 point et perpendiculaire à 2 plans donnés

Exemple

Trouver l'équation du plan passant par le point $M_1(0, 0, 4)$ et perpendiculaire aux plans $\pi_1 \equiv 2x - 3y - 5 = 0$ et $\pi_2 \equiv x - 4z - 3 = 0$.

Solution

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan (σ) cherché, alors :

$\vec{M_0M} = (x, y, z - 4)$, $\vec{\eta_1} = (2, -3, 0)$ et $\vec{\eta} = (1, 0, -4)$ sont coplanaires, c'est à dire $(\vec{M_0M}, \vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}) = 0$

L'équation du plan (σ) est donc donnée par :

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } 12x + 8y + 3z - 12 = 0$$

Faisceau des plans

Soient 2 plans sécants $(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Posons $(d) = \pi_1 \cap \pi_2$ la droite d'intersection entre ces 2 plans. Il existe toujours une infinité des plans contenant la droite (d) .

Cette infinité des plans représente un **faisceau des plans d'axe (d)** .

Les plans π_1 et π_2 sont dits plans fondamentaux du faisceau.

On a l'équation générale du faisceau donnée par

$$(F) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

ou simplement

$$(F) \equiv \pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$$

Faisceau des plans

Détermination de plan appartenant au faisceau et passant par un point

On peut déterminer le paramètre λ tel qu'un plan passant par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ appartienne au faisceau, c'est-à-dire :

$$M_0 \in (F) \Leftrightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi_1(M_0) + \lambda \pi_2(M_0) = 0 \implies \lambda = \frac{-\pi_1(M_0)}{\pi_2(M_0)}$$

Exemple 1 : Trouver l'équation du plan passant par l'intersection des deux plans $2x + y - 4 = 0$; $y + 2z = 0$ et par le point $M(2, -1, 1)$

Exemple 2 : Dans le faisceau de plans $(F) = 2x + \lambda x - 3 + \lambda + z + 2\lambda z - 3y + 3\lambda y = 0$, déterminer le plan passant par le point $M(1, -2, 3)$.

Faisceau des plans

Solutions

Solution 1 :

Son équation est de la forme $2x + y - 4 + \lambda(y + 2z) = 0$. Puisque $M(2, -1, 1)$ appartient au plan cherché, nous avons

$$4 - 1 - 4 + \lambda(-1 + 2) = 0 \iff \lambda = 1.$$

D'où l'équation cherchée est :

$$2x + 2y - 2z - 4 = 0 \iff x + y - z - 2 = 0$$

Solution 2 :

L'équation du faisceau peut aussi s'écrire sous la forme

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + y + 2z + 1) = 0.$$

Or, le plan passe par le point $M(1, -2, 3)$.

$$\text{Cela implique } 2 + 6 + 3 - 3 + \lambda(1 - 6 + 6 + 1) = 0 \implies \lambda = -4.$$

D'où l'équation cherchée est :

$$2x - 3y + z - 3 - 4(x + y + 2z + 1) = 0 \text{ ou } 2x + 15y + 7z + 7 = 0$$

Intersection de 3 plans

Intersection de 3 plans

Soient les trois plans sécants deux à deux :

$$(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$(\pi_3) \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Les coordonnées du point commun à ces trois plans vérifient ce système.

Le système admet une solution unique ssi le déterminant

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

Exemple d'application

Trouvez le point d'intersection de 3 plans

On donne les plans d'équations cartésiennes

$$(\pi_1) \equiv 2x - 3y + z - 3 = 0, (\pi_2) \equiv x + y + 2z + 1 = 0 \text{ et}$$

$$(\pi_3) \equiv -3x + 5y + z - 6 = 0$$

Solution : Vérifions que ces 3 plans ont effectivement un point en commun.

Pour cela, calculons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Avec un déterminant différent de zéro, nous sommes sûrs que ces plans ont bien un point en commun.

Exemple d'application

Recherche du point d'intersection de ces 3 plans

Assurés de son existence, ce point intersection est obtenu en résolvant le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \\ -3x + 5y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

D'où $x = -7$, $y = -4$, $z = 5$, On a le point $M(-7, -4, 5)$

Plan passant par l'intersection de 3 des plans donnés

Plan passant par l'intersection de 3 des plans donnés

Soient les trois plans ayant un point commun M :

$$(\pi_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$(\pi_3) \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

L'équation générale des plans passant par le point M s'écrit
 $:\pi_1 + \lambda \pi_2 + \mu \pi_3 = 0$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Remarque

Pour l'équation contenant deux paramètres ci-dessus, il existe une double infinité de plans passant par le point commun aux trois plans donnés.

Exercices d'Application

- ❶ Trouver un système d'équations paramétriques du plan π comprenant les points $(4, 1, 5)$, $(2, 1, -1)$, $(3, 2, -2)$
- ❷ Trouver un système d'équations paramétriques du plan π dont une équation cartésienne est $2x - 3y + 5z - 4 = 0$
- ❸ Trouver un système d'équations paramétriques :
 - (a) contenant le point $A(1, 1, 3)$ et parallèle au plan défini par $(2, 1, -1)$ et $(1, -1, -1)$
 - (b) passant par l'origine et confondu avec le plan défini par $(2, 3, 1)$ et $(3, 2, 1)$
 - (c) passant par les points $(1, 1, 3)$; $(-1, 3, 2)$ et $(1, -1, 2)$

Exercices d'Application

- 1 Trouver une équation cartésienne du plan π donné par un système d'équations paramétriques :

2 $(\pi) \equiv \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = -\alpha + 3\beta \\ x_3 = -\beta \end{cases}$

3 $(\pi) \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta - 1 \\ x_2 = -2\alpha - \beta + 1 \\ x_3 = \alpha - 3\beta - 2 \end{cases}$

- 4 Ecrire une équation du plan mené par les 3 points P, Q et R
- $(3, 2, 1), (-1, 1, -2); (3, -4, 1)$
 - $(2, 0, 3), (1, 1, 0); (3, 2, -1)$
 - $(1, -2, 1), (2, -1, 0); (3, -2, 2)$

Exercices d'Application

- ❶ Trouver une équation du plan :
 - contenant le point $(1, 3, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -1, 5)$
 - contenant le point $(-2, 0, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4, 3, -2)$
 - contenant le point $(-2, 1, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-3, 0, 2)$
- ❷ Ecrire l'équation des plans suivant leurs coordonnées à l'origine
 - (a) $10x - 15y + 6z = 30$
 - (b) $12x + 15y - 20z = 60$
 - (c) $2x - y + 4z = 4$
 - (d) $2x + y + 3z = 6$

Exercices d'Application

- ❶ Trouver une équation cartésienne du plan π dont un couple de vecteurs directeurs est $(1, 2, -3)$, $(2, 5, -4)$ et comprenant le point $(3, -1, 2)$
- ❷ Trouver une équation cartésienne du plan π comprenant les points $(1, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ et $(1, 7, -9)$
- ❸ Ecrire l'équation du plan
 - parallèle au plan XOY et situé à 3 unités au dessus de celui-ci
 - parallèle au plan YOZ et ayant 4 pour abscisse à l'origine
 - perpendiculaire à l'axe OZ au point $(0, 0, 6)$
 - parallèle au plan XOZ et situé 6 unités derriere celui-ci.
 - parallèle au plan OZ , ayant pour abscisse à l'origine 2 et pour ordonnée à l'origine -3
 - parallèle à l'axe OZ , ayant pour trace sur XOY $x + y - 2 = 0$

Exercices d'Application

- ❶ utiliser la forme normale pour écrire les équations de chacun des plans suivants, étant donné :
 - $\alpha = 120^\circ; \beta = 45^\circ; \gamma = 120^\circ; p = 5$
 - $\alpha = 90^\circ; \beta = 135^\circ; \gamma = 45^\circ; p = 4$
 - le pied de la normale au plan passant par l'origine est le point $(2, 3, 1)$
 - $\alpha = 120^\circ; \beta = 60^\circ; \gamma = 135^\circ; p = 2$
 - $p = 2, \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\cos \beta}{4} \frac{\cos \gamma}{8}$
- ❷ Ramener chacune des équations suivantes à la forme normale, trouver les cosinus directeurs de la normale ainsi que sa longueur
 - $2x - 2y + z - 12 = 0$
 - $9x + 6y - 2z + 7 = 0$
 - $x - 4y + 8z - 27 = 0$

FIN CHAPITRE DEUXIEME